EL CONJUNTO DE LOS COMPLEJOS.

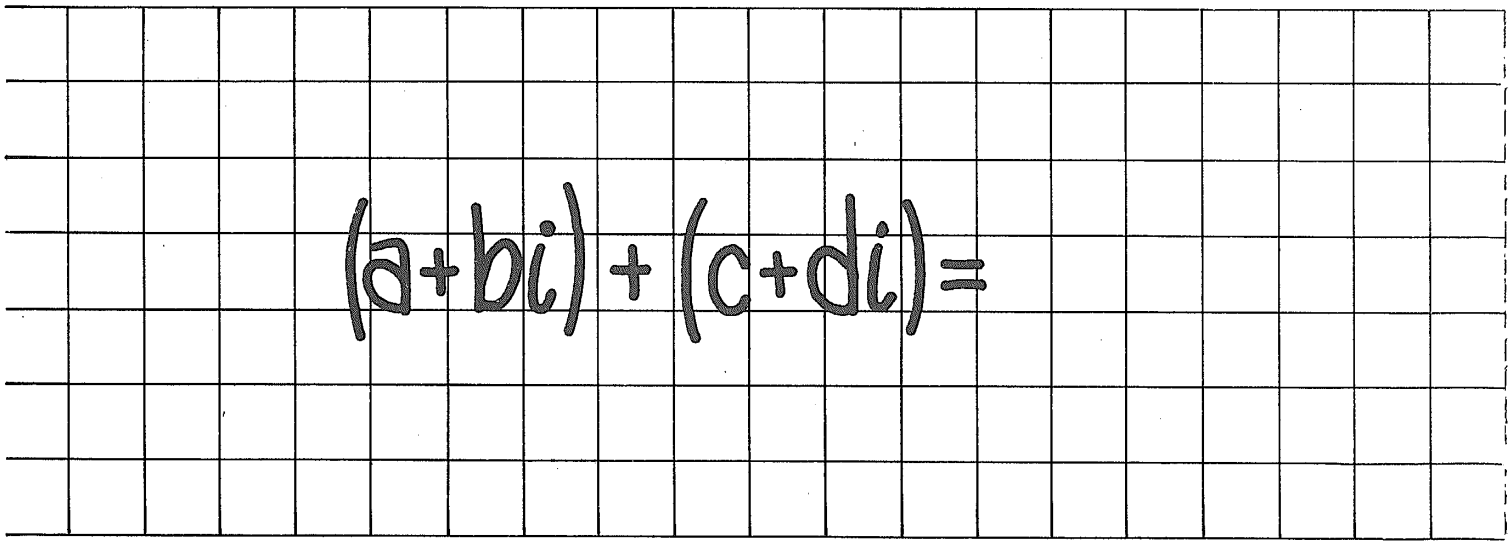
Estructura y operaciones

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 14

EL CONJUNTO DE LOS COMPLEJOS.

Estructura y operaciones

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
EL CONJUNTO DE LOS COMPLEJOS. Estructura y operaciones
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1514-4

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

14.1 El conjunto de los complejos 9

14.2 Operaciones con imaginarios 34

14.3 Operaciones con números complejos 51

14.4 Operaciones con polinomios en $\mathbb{C}$ 69

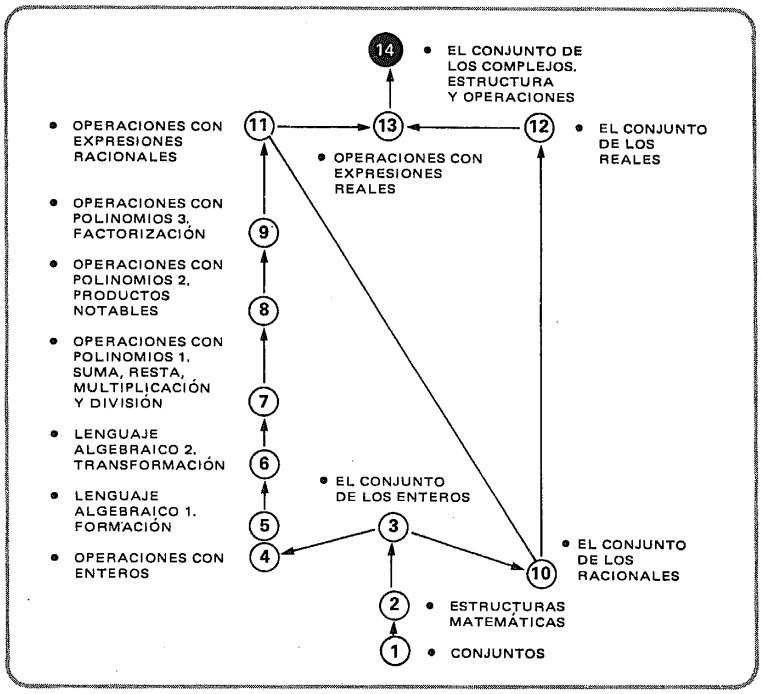
14.5 El campo de los números complejos 74

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 14. El conjunto de los complejos. Estura y operaciones

Objetivos: interpretar la suma, resta, multiplicación y división de números complejos como estructuras matemáticas con ciertas propiedades, de las que se deducen las reglas para realizar dichas operaciones

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Nociones de las estructuras matemáticas con una o dos leyes de composición interna	1	2
• Concepto de número entero	1	3
• Concepto de número racional	1	10
• Concepto de número real	1	12
• Manejo de los números reales	1	4, 11, 13
• Manejo de polinomios	1	7, 8, 9

14.1

El conjunto de los complejos

1

Sabemos que:

$\sqrt[3]{8} =$ ⌊___⌋

2

2

$\sqrt[3]{-8} =$ ⌊___⌋

-2

3

$\sqrt[5]{1} = \square$

1

4

Atención.

$\sqrt{16} = \square$

$|4| = |-4| = 4$

5

$\sqrt[4]{81} = \square$

$|3| = |-3| = 3$

6

Atención.

$\sqrt{-4} =$ ⌊_____⌋

Número no definido en $\mathbb{R}$

7

$\sqrt{-4} = ?$

No existe ningún número real
cuyo cuadrado sea

$-4,$

ya que:

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$

8

$\sqrt{-4} = ?$

Si queremos que esta operación tenga un resultado
es necesario "**inventar**" **nuevos números,**
como lo hemos hecho ya en casos semejantes.

9

Cuando nuestro universo estuvo formado
por los números **naturales**

$\mathbb{N}$

fue necesario inventar los **negativos,**
para poder dar respuesta a una
interrogante como esta:

$$5 - 7 = ?$$

Constituimos, entonces,
el conjunto de los **enteros:**

$\mathbb{Z}$

10

Después de hacer de los **enteros**

$\mathbb{Z}$

nuestro universo, fue necesario poder expresar el
resultado de una operación como ésta:

$$\frac{5}{7} = ?$$

lo cual nos condujo a la "invención" de los **fraccionarios.**
De esta manera integramos el conjunto de los **racionales:**

$\mathbb{Q}$

11

Cuando los **racionales**

$\mathbb{Q}$

eran los únicos números por nosotros aceptados,
la necesidad de tener un resultado para una
operación como ésta

$$\sqrt{2} = ?$$

nos llevó a "inventar" los **irracionales,** extendiendo
nuestro universo al conjunto de los **reales:**

$\mathbb{R}$

12

Ahora que nuestro universo está constituido por el conjunto de los **reales**

$$\mathbb{R}$$

se requiere tener un resultado para una operación como ésta:

$$\sqrt{-4} = ?$$

13

Para tal efecto, diremos que:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$$

y definiremos un nuevo número:

$$\sqrt{-1} = i$$

14

Entonces:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\, i = 2i$$

y en general:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i$$

$a > 0$ siendo $i = \sqrt{-1}$

15

Asignaremos el nombre de

imaginarios

a los nuevos números.

16

Definición:

$$\mathbb{I} = \{ x | x = \sqrt[n]{-a} \text{ y } n \text{ es par y } a \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0 \}$$

$\mathbb{I} = \{ x | x \text{ es un número imaginario} \}$

17

De acuerdo con lo establecido,
expresar en términos de i:

$$\sqrt{-16} = \boxed{\quad}$$

4i

18

Tomemos nota de esta nomenclatura:

número imaginario
expresado
en forma de radical

$\sqrt{-16} = 4i$

número imaginario
expresado
en **forma ordinaria**

19

Expresar en forma ordinaria:

$\sqrt{-25} =$ ____

5i

20

$\sqrt{-81} =$ ____

9i

21

$\sqrt{-100} =$ _____

10i

22

$\sqrt{-1} =$ __

i

23

$\sqrt{-5} =$ _____

$\sqrt{5}$ i

24

$\sqrt{-17} =$ ____

$\sqrt{17}\,i$

25

$\sqrt{-12} =$ ____

↓

____

$\sqrt{12}\,i$

$= \sqrt{4 \cdot 3}\,i$

$= 2\sqrt{3}\,i$

26

$\sqrt{-18} =$ ____

↓

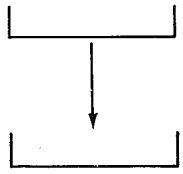
____

$\sqrt{18}\,i$

$= \sqrt{9 \quad 2}\,i$

$= 3\sqrt{2}\,i$

27

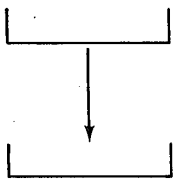
$\sqrt{-50} =$ 

$\sqrt{50}\ i$

$= \sqrt{25 \cdot 2}\ i$

$= 5\sqrt{2}\ i$

28

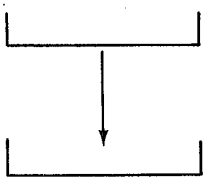
$3\sqrt{-48} =$ 

$3\sqrt{48}\ i$

$= 3\sqrt{16 \cdot 3}\ i$

$= 12\sqrt{3}\ i$

29

$-5\sqrt{-27} =$ 

$-5\sqrt{27}\ i$

$= -5\sqrt{9 \cdot 3}\ i$

$= -15\sqrt{3}\ i$

30

$$\sqrt{-\frac{1}{4}} = \square \downarrow \square$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}}\ i$$

$$= \frac{1}{2}\ i$$

31

$$\sqrt{-\frac{3}{4}} = \square \downarrow \square$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}}\ i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$$

32

Atención.

$$\sqrt{-x} = \square$$

Atención.

$\sqrt{x}\ i$

siempre y cuando

$x > 0$

33

Atención.

Expresar como un número imaginario, dado en su forma ordinaria:

$\sqrt{a} =$ ____

Atención.

$\sqrt{-a}\ i$

siempre y cuando

$a < 0$

34

Atención.

Expresar como un número imaginario, dado en su forma ordinaria:

$\sqrt{3x + 4} =$ ____

- $\sqrt{-(3x + 4)}\ i$

si y sólo si

$3x + 4 < 0$

o

$x < -\frac{4}{3}$

35

Expresar como un número imaginario, dado en su forma ordinaria:

$\sqrt{-a^2} =$ ____

↓

____

$\sqrt{a^2}\ i$

$= |a|\ i$

36

Atención.

Expresar como un número imaginario, dado en su forma ordinaria:

$$\sqrt{-n} = \underset{\text{Para } n < 0}{\square}$$

Observar con atención.

Para $n < 0$

$\sqrt{-n}$

es un número real.

Por ejemplo:

Si $n = -4$

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-(-4)}$$
$$= \sqrt{4} = 2$$

1.14.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

37

Potencias de i

38

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 =$ ⌊___⌋

-1

39

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 =$ ⌊___⌋

$i^3 = i^2 \cdot i$

$= (-1)i$

$= -i$

40

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 =$ ⌊___⌋

$i^4 = i^2 \cdot i^2$

$= (-1)(-1)$

$= 1$

41

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = \square$

$i^5 = i^4 \cdot i$

$= 1 \cdot i$

$= i$

42

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = \square$

$i^6 = i^5 \cdot i$

$= i \cdot i = i^2$

$= -1$

43

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

etcétera ⇩

44

Potencias de i:

$\sqrt{-1}$ ←	i	i^5	i^9	i^{13}	i^{17}	
-1 ←	i^2	i^6	i^{10}	i^{14}	i^{18}	Etc. →
$-i$ ←	i^3	i^7	i^{11}	i^{15}	i^{19}	
1 ←	i^4	i^8	i^{12}	i^{16}	i^{20}	

45

Estudiar con atención.

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt{\sqrt{-16}} = \sqrt{4i} = 2\sqrt{i}$$

En efecto:

$$(2\sqrt{i})^4 = 2^4 \cdot (\sqrt{i})^4 = 16i^2 = 16(-1) = -16$$

46

$$\sqrt[6]{-64} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{-64}}$$

$$= \sqrt[3]{8i}$$

$$\bullet = 2\sqrt[3]{i}$$

En efecto:

$$(2\sqrt[3]{i})^6 = 2^6 \cdot (\sqrt[3]{i})^6$$

$$= 64\, i^2 = -64$$

47

$\sqrt[8]{-5} =$ ⌊_____⌋

$\sqrt[4]{\sqrt{5}\,i}$

$= \sqrt[8]{5}\,\sqrt[4]{i}$

En efecto:

$(\sqrt[8]{5} \cdot \sqrt[4]{i})^8 = 5i^2$

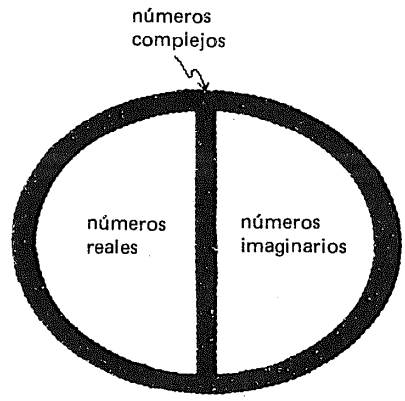
$= -5$

48

Llamaremos

conjunto de los números complejos

a aquel que resulta de la unión del conjunto de los reales y del conjunto de los imaginarios.



49

Llamemos

$\mathbb{C} = \{z | z \text{ es un número complejo}\}$

Entonces:

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \mathbb{I}$

50

Forma general adoptada por un número complejo:

$$\underbrace{a}_{\text{parte real}} + \underbrace{bi}_{\text{parte imaginaria}}$$

$a,b \in \mathbb{R}$

$i = \sqrt{-1}$

51

Definición:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}\}$$

52

Ejemplos de **números complejos** expresados en **forma ordinaria:**

$3 + 5i$	$\sqrt{5} + \sqrt{3}\,i$	$1 + i$
$-5 + 8i$	$-\sqrt[3]{4} + \sqrt{5}\,i$	$4 + 0i \rightarrow$ equivalente al real 4
$4 - 7i$	$\sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{7}{8}}\,i$	$0 + 2i \rightarrow$ equivalente al imaginario $2i$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$		$1 + 0i \rightarrow$ equivalente al real 1
$-0.57 - 0.35i$	$\sqrt{0.3} + \sqrt[4]{0.7}\,i$	$0 + 0i \rightarrow$ equivalente al real 0

53

Ejemplos de **números complejos** expresados en **forma de radical:**

$3+\sqrt{-5}$ $\quad \sqrt{5}+\sqrt{-3}$ $\quad 1+\sqrt{-1}$

$-5+\sqrt{-8}$ $\quad -\sqrt[3]{4}+\sqrt{-5}$ $\quad 3\sqrt{-2}$

$4-\sqrt{-7}$ $\quad \sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{-\frac{7}{8}}$ $\quad \frac{3}{4}\sqrt{-3}$

$\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}$ $\quad \sqrt{0.3}+\sqrt[4]{-0.7}$ $\quad \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{2}{5}}$

54

Señalar los números que sean **complejos pero no reales:**

$3+4\sqrt{5}$	$\sqrt{x-3}$	para $x<3$
$4-5\sqrt{-3}$	$\sqrt{5-x}$	para $x\leqslant 5$
$\sqrt{98275}$	$\sqrt{x^2+3}$	para toda x
$\sqrt{-0.758}$	$\sqrt{4x^2}$	para $x<0$

$4-5\sqrt{-3}$

$\sqrt{-0.758}$

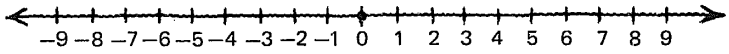
$\sqrt{x-3}$ para $x<3$

55

Representación gráfica de los números complejos

56

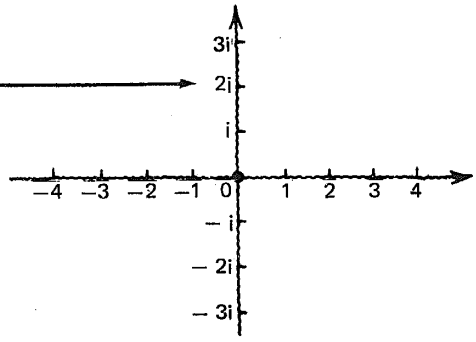
Recordemos la representación gráfica de los **números reales,** llamada recta real o **eje real:**



A cada número real corresponde un único punto de la recta, y cada punto de la recta representa un número real único por lo tanto, decimos que hay una **correspondencia uno a uno** entre los números reales y los puntos del eje real.

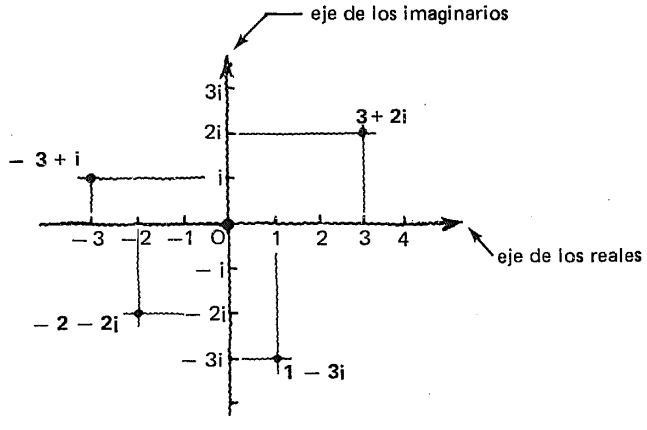
57

Consideremos un eje perpendicular al real, sobre el cual quedarán representados los *números imaginarios.*



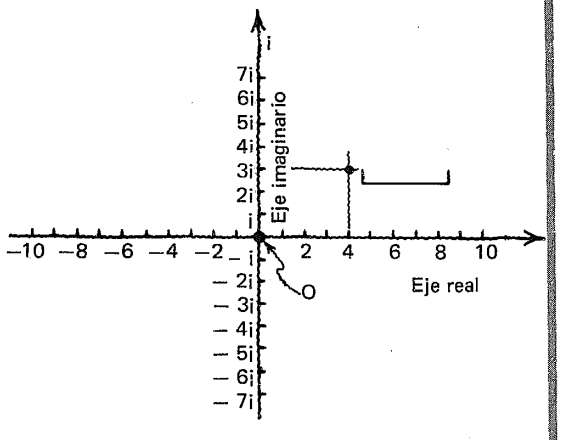
58

Cada punto del plano representará un número complejo, como se sugiere en el esquema:



59

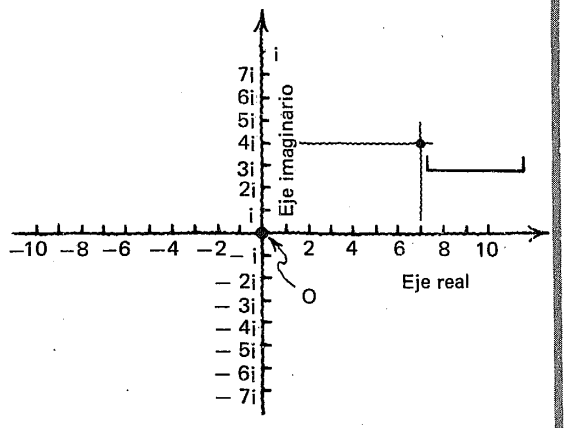
Escribamos el número complejo correspondiente al punto indicado:



$4 + 3i$

60

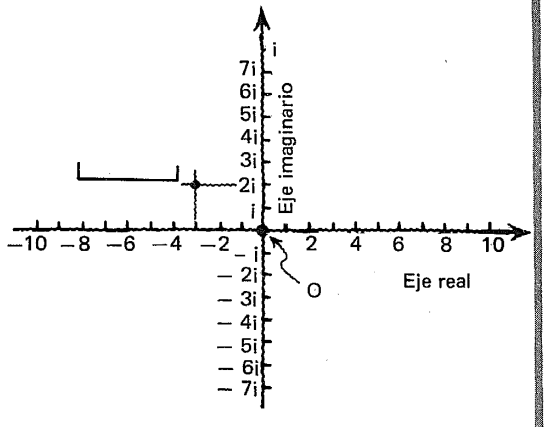
Escribir el número complejo correspondiente al punto indicado:



$7 + 4i$

61

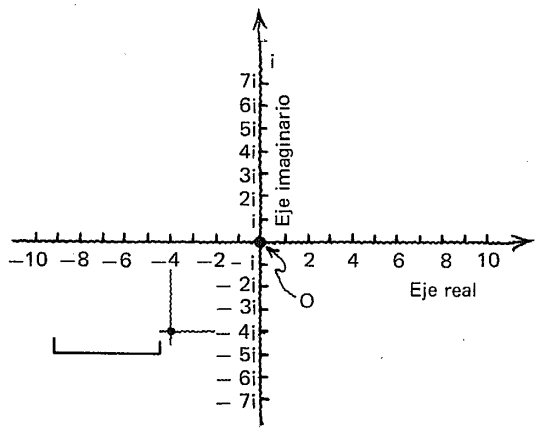
Escribir el número complejo correspondiente al punto indicado:



$-3 + 2i$

62

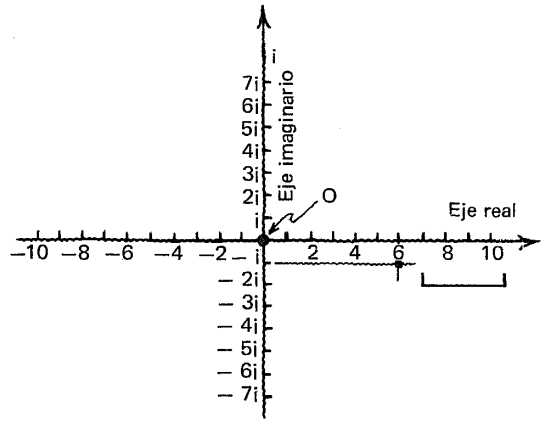
Escribir el número complejo correspondiente al punto indicado:



$-4-4i$

63

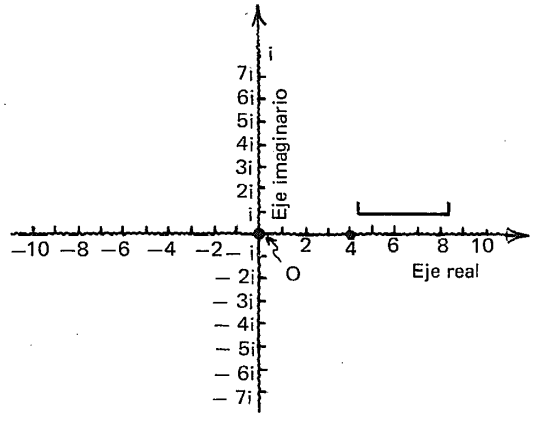
Escribir el número complejo correspondiente al punto indicado:



$6-i$

64

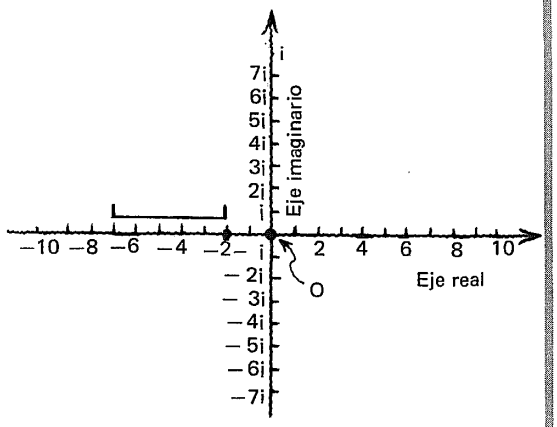
Escribir el número complejo correspondiente al punto indicado:



$4+0i=4$

65

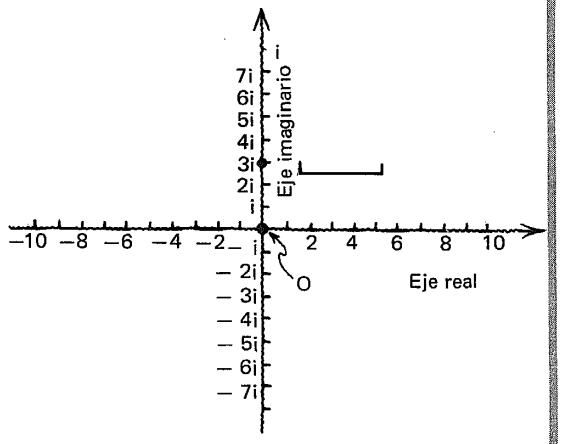
Escribir el número complejo correspondiente al punto indicado:



$-2 + 0i = -2$

66

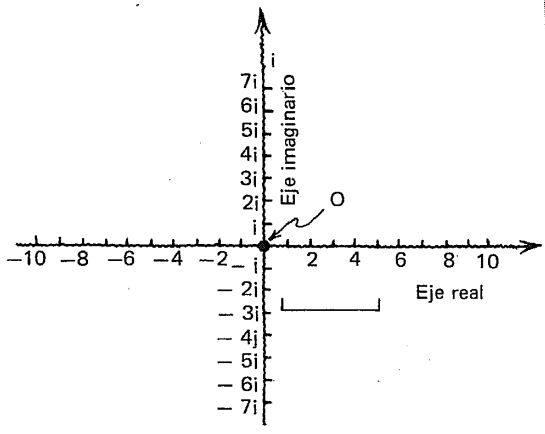
Escribir el número complejo correspondiente al punto indicado:



3i

67

Escribir el número complejo correspondiente al punto indicado:



$0 + 0i = 0$

1.14.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

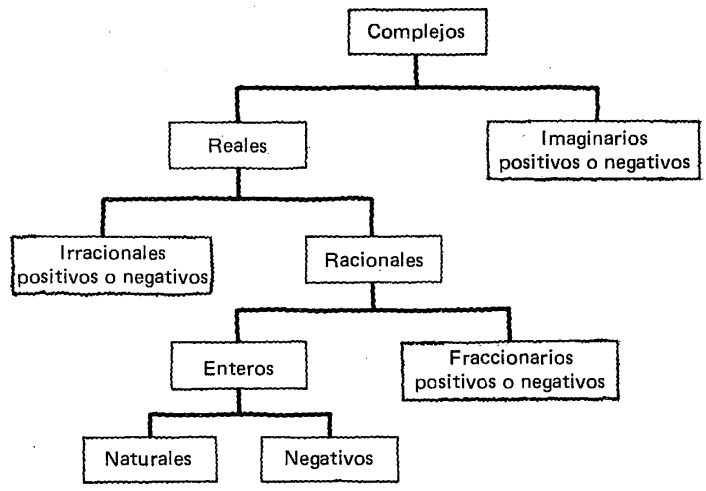
68

Una vez aceptados los **imaginarios**
queda constituido
un sistema número
en que **están definidas**
la operaciones de:

- suma
- resta
- multiplicación
- división
- potenciación y
- radicación

69

Esquema general
del conjunto
de los complejos
y subconjuntos
respectivos:



1.14.1.3

Práctica de ubicación
de números dados
en alguno de los
subconjuntos de $\mathbb{C}$.

1.14.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* por qué es necesario ampliar el conjunto de los reales con los números imaginarios, para constituir el conjunto $\mathbb{C}$ de los complejos;
- *identificar* los imaginarios en un conjunto dado de números;
- *ubicar* en alguno de los subconjuntos de $\mathbb{C}$ un número dado.

14.2

Operaciones con imaginarios

70

El símbolo

i

deberá sujetarse
a las reglas establecidas
para el manejo
de los números reales.

71

Por lo tanto:

$3i + 2i =$ ⌊_____⌋

por la propiedad de

⌊_____⌋

Observar con atención:

$3i + 2i$
$3i = 3 \cdot i$
$2i = 2 \cdot i$
$3i + 2i = (3 + 2)i$

↓

- $5i$

- distributividad de la multiplicación con respecto a la suma

72

$i + i + i = \square$

$3i$

73

$10i - 7i = \square$

$3i$

74

$i \cdot i = \square$

i^2

75

$(-i)i^3 = \square$

$-i^4$

76

$3i^2 \cdot (-5i^3) = \square$

$-15i^5$

77

Podemos hacer uso de los valores que habíamos encontrado para las potencias de i, en la simplificación de los resultados.
Así:

$-15i^5 = \square$

$-15i$

Véase el cuadro 44

78

$$\frac{i^5}{i^3} = \square = \square$$

$\square$ expresión simplificada

$i^2 = -1$

79

$$\frac{6i^4}{2i^2} = \square = \square$$

$3i^2 = -3$

80

$$\frac{3\sqrt{2}\ i}{-\sqrt{3}\ i} = \square$$

$$\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{6}}{3}$$

$$= -\sqrt{6}$$

81

$$i \cdot (-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

Cuando:

$$a \cdot b = 1$$

decimos que a es el inverso multiplicativo de b, y viceversa.

Por lo tanto:

— i es el inverso multiplicativo de i, y viceversa.

82

Entonces:

$$\frac{1}{i} = -i$$

y

$$\frac{1}{-i} = i$$

83

De acuerdo con lo anterior:

$$\frac{3}{i} = \boxed{\quad}$$

— 3i

84

$-\frac{\sqrt{5}}{i} = \square$

$\sqrt{5}\ i$

85

$\frac{4i^3}{2i^4} = \square = \square$

$\frac{2}{i} = -2i$

86

$\frac{\sqrt{16}\ i^2}{\sqrt{4}\ i^3} = \square = \square$

$\frac{4}{2i} = -2i$

87

$$\frac{3i^3}{4i^5} = \square = \square$$

$$\frac{3}{4i^2} = \frac{3}{4(-1)} = -\frac{3}{4}$$

88

Regla básica para el manejo de los números imaginarios:

Para la simplificación de números imaginarios dados en forma de radical
primero es necesario **expresarlos en forma ordinaria** (es decir, en términos de i)
y luego proceder a la simplificación utilizando las reglas aceptadas para el manejo de números reales.

89

El olvido de la regla básica anterior podría conducirnos a **resultados incorrectos** al aplicar ciegamente las **reglas** establecidas **para el manejo de radicales,** las cuales son **válidas únicamente para los números reales.**

90

Un ejemplo
de **resultado incorrecto**
obtenido
por la aplicación
de la regla

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

a
radicales
que representan
números
no definidos
en $\mathcal{R}$.

Para $n = 2$
$a = -4$
$b = -9$

$$\underbrace{\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}}_{\text{expresiones no definidas en } \mathcal{R}} = \sqrt{(-4)(-9)}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

resultado incorrecto

91

Resultado correcto
para
la misma operación,
obtenido al aplicar
la **regla básica** enunciada
para el manejo de
números imaginarios.

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = 2i \cdot 3i$$

$$= 6i^2$$

$$= 6(-1)$$

$$= -6$$

resultado correcto

92

Un ejemplo
de **resultado incorrecto**
por la aplicación
de la regla

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

a
radicales
que no representan
números reales.

$n = 2$
$a = 36$
$b = -9$

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{-9}} = \sqrt{\frac{36}{-9}}$$

$$= \sqrt{-4}$$

$$= 2i$$

resultado incorrecto

93

Resultado correcto.

para
la misma operación,
obtenido al aplicar
la **regla básica**
para el manejo
de números
imaginarios.

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{-9}} = \frac{6}{3i}$$

$$= \frac{2}{i}$$

$$= -2i$$

resultado correcto

94

Simplificar las expresiones siguientes,

aplicando la regla básica

para el manejo
de los números imaginarios:

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = \square$$

$$= \square$$

$2i + 3i$

$5i$

95

$$\sqrt{-25} + \sqrt{-81} = \square$$

$$= \square$$

$5i + 9i$

$14i$

96

$\sqrt{-9} + \sqrt{-100} - \sqrt{-121} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$3i + 10i - 11i$

$2i$

97

$3\sqrt{-64} - 5\sqrt{-49} + 3\sqrt{-121} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$24i - 35i + 33i$

$22i$

98

$\sqrt{-18} + \sqrt{-8} + 2\sqrt{-50} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$3\sqrt{2}\,i + 2\sqrt{2}\,i + 10\sqrt{2}\,i$

$15\sqrt{2}\,i$

99

$3\sqrt{-20} - 2\sqrt{-45} =$ ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

$6\sqrt{5}\,i - 6\sqrt{5}\,i$

$= 0$

100

$2\sqrt{-a^2} + \sqrt{-a^4} + 5\sqrt{-a^6} =$ ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

Para $a > 0$

$2ai + a^2 i + 5a^3 i$

$(2a + a^2 + 5a^3)i$

1.14.2.1

Práctica adicional
de suma de imaginarios,
si
se considera necesario.

101

$\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$4i \cdot 5i$

$= 20i^2$

$= -20$

102

$\sqrt{-81} \cdot \sqrt{-100} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$9i \cdot 10i$

$= 90i^2$

$= -90$

103

$\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-7} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$\sqrt{5}\, i \cdot \sqrt{7}\, i$

$= \sqrt{35}\, i^2$

$= -\sqrt{35}$

104

$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$3i \cdot 4i \cdot 5i$

$= 60i^3$

$= 60(-i)$

$= -60i$

105

$4\sqrt{-9} \cdot 5\sqrt{-25} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$12i \cdot 25i$

$= 300i^2$

$= -300$

106

$2\sqrt{-2} \cdot 3\sqrt{-3} \cdot 4\sqrt{-4} =$ ☐

↓

$=$ ☐

$2\sqrt{2}\,i \cdot 3\sqrt{3}\,i \cdot 4\sqrt{4}\,i$

$= 24\sqrt{24}\,i^3$

$= 48\sqrt{6}\,i^3$

$= 48\sqrt{6}\,(-i)$

$= -48\sqrt{6}\,i$

107

$\sqrt{-12} \cdot \sqrt{-8} \cdot \sqrt{-50} \cdot \sqrt{-27} =$ ⌊ ⌋

↓

$=$ ⌊ ⌋

$2\sqrt{3}\,i \cdot 2\sqrt{2}\,i \cdot 5\sqrt{2}\,i \cdot 3\sqrt{3}\,i$

$= 60\sqrt{36}\,i^4$

$= 360i^4$

$= 360 \times 1$

$= 360$

108

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} =$ ⌊ ⌋

↓

$=$ ⌊ ⌋

$a > 0$
$b > 0$

$\sqrt{a}\,i \cdot \sqrt{b}\,i$

$= \sqrt{ab}\,i^2$

$= -\sqrt{ab}$

109

Atención.

$\sqrt{-5} \cdot \sqrt{2} =$ ⌊ ⌋

↓

$=$ ⌊ ⌋

$\sqrt{5}\,i \cdot \sqrt{2}$

$= \sqrt{10}\,i$

1.14.2.2

Práctica adicional
de multiplicación
de imaginarios,
si
se considera necesario.

110

$$\frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-16}} = \square = \square$$

$$\frac{5i}{4i} = \frac{5}{4}$$

111

$$\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}} = \square = \square$$

$$\frac{4i}{2i} = 2$$

112

Atención.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}} = \square$$

$$= \square$$

Debemos recordar que:

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}\ i}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{i}$$

$$= -\sqrt{5}\ i$$

113

$$\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{-5}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{5}\ i}$$

$$= \frac{\sqrt{18}}{i}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{i}$$

$$= -3\sqrt{2}\ i$$

114

$$\frac{10\sqrt{-36}}{5\sqrt{-4}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{10 \cdot 6i}{5 \cdot 2i}$$

$$= 6$$

115

$$\frac{\sqrt{-25}\cdot\sqrt{-36}}{\sqrt{-4}} = \square$$

$$= \square$$

$$\frac{5i \cdot 6i}{2i}$$

$$= \frac{15i^2}{i}$$

$$= 15i$$

1.14.2.3

Práctica adicional
de división de imaginarios,
si
se considera necesario.

1.14.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* operaciones de suma, resta, multiplicación y división con números imaginarios.

14.3

Operaciones con números complejos

116

Suma o adición de números complejos

117

Haremos extensivas, para los complejos,
las propiedades generales
del campo de los números reales
(asociatividad, conmutatividad,
distributividad, etc.).

118

Así:

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di$$

$$= (a + c) + (bi + di)$$

por las propiedades asociativa y conmutativa de la suma.

119

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di$$

$$= (a + c) + (bi + di)$$

$$= (a + c) + (b + d)i$$

Por la propiedad _____

distributiva de la multiplicación con respecto a la suma (a la derecha)

120

La suma o adición en $\mathbb{C}$ queda definida así:

$$(a + bi) + (c + di) = \underbrace{(a + c)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(b + d)i}_{\text{parte imaginaria}}$$

121

$(3 + 4i) + (5 + 3i) =$ ☐

↓

$=$ ☐

$(3 + 5) + (4 + 3)i$

$= 8 + 7i$

122

$(5 - 3i) + (3 + 10i) =$ ☐

↓

$=$ ☐

$(5 + 3) + (-3 + 10)i$

$= 8 + 7i$

123

$(-4 - i) + (-5 + 7i) =$ ☐

$-9 + 6i$

124

$(5 - 3i) + 3i = \square$

$= \square$

$(5 + 0) + (-3 + 3)i$

$= 5 + 0i$

$= 5$

125

$(10 - 4i) - 5 = \square$

$= \square$

$(10 - 5) + (-4 + 0)i$

$= 5 + (-4)i$

$= 5 - 4i$

126

$\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}i\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i\right) = \square$

$= \square$

$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right)i$

$= 1 + \frac{7}{20}i$

127

$(0.3 + 0.7i) + (0.5 - 0.4i) =$ ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

$(0.3 + 0.5) + (0.7 - 0.4)i$

$= 0.8 + 0.3i$

128

$(\sqrt{12} - \sqrt{18}\ i) + (\sqrt{27} - \sqrt{8}\ i) =$ ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

$(\sqrt{12} + \sqrt{27}) + (-\sqrt{18} - \sqrt{8})i$

$= (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) + (-3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})i$

$= 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\ i$

129

No debemos olvidar la importancia que tiene la **aplicación** de la **regla básica** para el manejo de imaginarios:

$(\sqrt{50} - \sqrt{-50}) + (\sqrt{8} + \sqrt{-8}) =$ ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

$(\sqrt{50} - \sqrt{50}\ i) + (\sqrt{8} + \sqrt{8}\ i)$

$= (\sqrt{50} + \sqrt{8}) + (-\sqrt{50} + \sqrt{8})i$

$= (5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) + (-5\sqrt{2} + 2\sqrt{2})i$

$= 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\ i$

1.14.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

130

Resta o sustracción de números complejos

131

En el campo de los reales hemos definido la sustracción así:

$$x - y = x + \underbrace{(-y)}$$

inverso aditivo de y

Extenderemos esta definición para los complejos.

132

El inverso aditivo de

$5 + 3i$ es $\square$

$= \square$

$-(5 + 3i)$

$= -5 - 3i$

133

El inverso aditivo de

$-8 + 7i$ es $\square$

$= \square$

$-(-8 + 7i)$

$= 8 - 7i$

134

El inverso aditivo de

$-3 - i$ es $\square$

$= \square$

$-(-3 - i)$

$= 3 + i$

135

Ahora bien:

$(5 - 8i) - (3 - 5i) =$ ⌊ ⌋

↓

$=$ ⌊ ⌋

$(5 - 8i) + (- 3 + 5i)$

$= (5 - 3) + (- 8 + 5)i$

$= 2 - 3i$

1.14.3.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

Llamaremos

complejos conjugados

a un par de números
complejos de estas formas:

↓

a + bi **a − bi**

137

Dos complejos conjugados:

$3 + 5i \qquad 3 - 5i$

suma → ⌊_____⌋

↓

= ⌊_____⌋

☞ Observa con atención el resultado.

$(3 + 5i) + (3 - 5i)$

$= (3 + 3) + (5 - 5)i$

$= 6 + 0i$

$= 6$

138

Suma de dos complejos conjugados:

$(-3 - 7i) + (-3 + 7i) =$ ⌊_____⌋

↓

$=$ ⌊_____⌋

$(-3 - 3) + (-7 + 7)i$

$= -6 + 0i$

$= -6$

139

$\left(\frac{3}{4} - i\right) + \left(\frac{3}{4} + i\right) =$ ⌊_____⌋

↓

$=$ ⌊_____⌋

$\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) + (-1 + 1)i$

$= \frac{3}{2} + 0i$

$= \frac{3}{2}$

140

En general:

$(a + bi) + (a - bi) =$ ⌊ ⌋

$=$ ⌊ ⌋

$(a + a) + (b - b)i$

$= 2a + 0i$

$= 2a$

141

$(a + bi) + (a - bi) = 2a$

¿Es 2a un número real?

Sí/No

Sí

142

Conclusión, expresada en lenguaje ordinario:

⌊ ⌋

Por ejemplo:

La **suma** de dos **complejos conjugados** da como resultado un número **real.**

143

Completar la siguiente proposición:

La diferencia de dos complejos conjugados

_____

da como resultado un número **imaginario**

Véase cuadro siguiente.

144

$(a + bi) - (a - bi)$

$= a + bi - a + bi = 2bi$

2bi es un número imaginario.

1.14.3.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

145

Multiplicación de números complejos

146

Definición:

$(a + bi)(c + di) =$ ⌊ ⌋

$$\begin{array}{l} a + bi \\ c + di \\ \hline ac + bci \\ \qquad adi + bdi^2 \\ \hline ac + (bc + ad)i + bdi^2 \end{array}$$

$ac + (bc + ad)i - bd$

$(ac - bd) + (bc + ad)i$

147

Multiplicación en $\mathbb{C}$

$(a + bi)(c + di) = \underbrace{(ac - bd)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(bc + ad)i}_{\text{parte imaginaria}}$

El producto de dos números complejos es ⌊ ⌋

un número complejo

148

$(3 + 4i)(5 - 2i) =$ ____

$$\begin{array}{r} 3 + 4i \\ 5 - 2i \\ \hline 15 + 20i \\ \quad - 6i - 8i^2 \\ \hline 15 + 14i - 8i^2 \\ 15 + 14i + 8 \\ \downarrow \\ \bullet\ 23 + 14i \end{array}$$

149

$(-1 + i)(-3 - 4i) =$ ____

$$\begin{array}{r} -1 + i \\ -3 - 4i \\ \hline 3 - 3i \\ \quad + 4i - 4i^2 \\ \hline 3 + i - 4i^2 \\ 3 + i + 4 \\ \downarrow \\ \bullet\ 7 + i \end{array}$$

150

No olvidar la aplicación de la **regla básica** para el manejo de los **imaginarios.**

$(3 + \sqrt{-4})(-\sqrt{5} - \sqrt{-9}) =$ ____

$$(3+2i)(-\sqrt{5}-3i)$$

$$\begin{array}{r} 3 + 2i \\ -\sqrt{5} - 3i \\ \hline -3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\,i \\ \quad - 9i - 6i^2 \\ \hline -3\sqrt{5} - (2\sqrt{5}+9)i - 6i^2 \\ -3\sqrt{5} - (2\sqrt{5}+9)i + 6 \\ \downarrow \\ \bullet\ (6 - 3\sqrt{5}) - (2\sqrt{5}+9)i \end{array}$$

1.14.3.4

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

151

Efectuar la multiplicación de dos complejos conjugados:

$(5 + 3i)(5 - 3i) =$ _____

$$\begin{array}{l} 5 + 3i \\ 5 - 3i \\ \hline 25 + 15i \\ \quad - 15i - 9i^2 \\ \hline 25 - 9i^2 \\ 25 + 9 \end{array}$$

• 34

152

En general:

$(a + bi)(a - bi) =$ _____

$$\begin{array}{l} a + bi \\ a - bi \\ \hline a^2 + abi \\ \quad - abi - b^2 i^2 \\ \hline a^2 - b^2 i^2 \end{array}$$

• $a^2 + b^2$

153

Producto de dos complejos conjugados:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

¿Es $a^2 + b^2$ un número real?

Sí/ No

Sí

1.14.3.5

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

154

División de números complejos

155

Observar con atención.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \boxed{}$$

conjugado del denominador

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}\, i$$

El cociente de dos números complejos $\boxed{}$ un número complejo
es/no es

es

156

$$\frac{3 + 7i}{5 - 3i} = \boxed{}$$

$$\frac{(3 + 7i)(5 + 3i)}{(5 - 3i)(5 + 3i)}$$

$$\frac{-6 + 44i}{25 + 9}$$

$$\frac{-6 + 44i}{34}$$

$$-\frac{6}{34} + \frac{44}{34}\, i$$

- $-\frac{3}{17} + \frac{22}{17}\, i$

1.14.3.6

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

157

El cociente de dos números complejos conjugados es un número [ ]

- complejo

$$\frac{a + bi}{a - bi}$$

$$\frac{(a + bi)(a + bi)}{(a - bi)(a + bi)}$$

$$\frac{(a^2 - b^2) + 2abi}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}\,i$$

158

Por ejemplo:

$$\frac{7 + 5i}{7 - 5i} = [\ \ ]$$

$$\frac{(7 + 5i)(7 + 5i)}{(7 - 5i)(7 + 5i)}$$

$$\frac{24 + 70i}{74}$$

$$\frac{24}{74} + \frac{70}{74}\,i$$

- $\frac{12}{37} + \frac{35}{37}\,i$

1.14.3.7

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.14.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* las operaciones de suma, resta, multiplicación y división con números complejos.

14.4

Operaciones con polinomios en $\mathbb{C}$

159

Forma general de un polinomio con coeficientes complejos y con una indeterminada:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

con

$a_i \in \mathbb{C}$

y

exponentes $\in \mathbb{N}$.

160

Un ejemplo de polinomio en $\mathbb{C}$:

$$5ix^5 + 3\sqrt{2}\, x^4 - \frac{7}{8} x^3 + 10x^2 - 7x + 0$$

161

En este punto
debemos
ser capaces
de
efectuar operaciones de

- suma
- resta
- multiplicación
- división

con polinomios en $\mathbb{C}$.

162

Dos polinomios en $\mathbb{C}$:

$$3ix^3 - \sqrt{20}\,ix^2 + 4i$$

$$\sqrt{2}\,ix^3 - 5i$$

suma

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\begin{array}{r} 3ix^3 - \sqrt{20}\,ix^2 + 4i \\ \sqrt{2}\,ix^3 \qquad\qquad - 5i \\ \hline (3i + \sqrt{2}\,i)x^3 - \sqrt{20}\,ix^2 - i \end{array}$$

$$(3 + \sqrt{2})ix^3 - 2\sqrt{5}\,ix^2 - i$$

163

Al polinomio

$$(3 + 5i)x^2 + \sqrt{2}\,ix - \sqrt{3}$$

le restamos el polinomio

$$(3 - 5i)x^2 + 3\sqrt{2}\,ix + 2i$$

Diferencia

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(3 + 5i)x^2 + \sqrt{2}\,ix - \sqrt{3}$$
$$-(3 - 5i)x^2 - 3\sqrt{2}\,ix - 2i \quad \longleftarrow \text{inverso aditivo del sustraendo}$$
$$10ix^2 - 2\sqrt{2}\,ix - (\sqrt{3} + 2i)$$

$10ix^2 - 2\sqrt{2}\,ix - (\sqrt{3} + 2i)$ ⟵ polinomio diferencia

164

Dos polinomios:

$$(2 - 3i)x + 5i$$

$$(-3 + 4i)x - 5$$

su producto

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(2 - 3i)x + 5i$$
$$(-3 + 4i)x - 5$$

$$(2 - 3i)(-3 + 4i)x^2 + 5i(-3 + 4i)x - 5(2 - 3i)x - 25i$$

$$(2 - 3i)(-3 + 4i)x^2 + [5i(-3 + 4i) - 5(2 - 3i)]x - 25i$$

$$\mathbf{(6 + 17i)x^2 - 30x - 25i}$$

polinomio producto

165

Dos polinomios:

$(18 - 4i)x^2 + (4 + 6i)x - 3$ ← dividendo

$(3 + i)x - 1$ ← divisor

Cociente

Respuesta en el cuadro siguiente

$(5 - 3i)x + 3$ ← cociente

$(3 + i)x - 1$ | $(18 - 4i)x^2 + (4 + 6i)x - 3$ ← dividendo

$-(18 - 4i)x^2 + (5 - 3i)x$

$(9 + 3i)x - 3$

$-(9 + 3i)x + 3$

0 ← residuo

divisor

1.14.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.14.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* operaciones de suma, resta multiplicación y división con polinomios en $\mathbb{C}$.

14.5

El campo de los números complejos

166

$(\mathbb{C}, +)$

Representa un grupo abeliano o grupo conmutativo que cumple con las propiedades que se enumeran en los cuadros siguientes.

167

1. Cerradura — si $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
2. Asociatividad — $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ $\forall\, z_1, z_2, z_3, \in \mathbb{C}$
3. Existencia de elemento neutro o de identidad

$z + ? = z$

Indicar cuál es el elemento de identidad para la suma en $\mathbb{C}$:

$0 + 0i = 0$

168

4. Existencia de elementos inversos para todos los elementos de $\mathbb{C}$:

$z + \square = 0$

$-z$

si $z = a + bi$
el inverso aditivo es
$-z = -a - bi$

169

5. Conmutatividad:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

170

$(\mathbb{C}, X)$

Representa también un **grupo abeliano** o **grupo conmutativo** que cumple con las propiedades dadas en los siguientes cuadros.

171

1. Cerradura si $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$
2. Asociatividad $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
3. Existencia de elemento neutro o de identidad

$$z \cdot \boxed{\quad\quad} = z$$

Indicar cuál es el elemento de identidad para la multiplicación en $\mathbb{C}$

$\boxed{\quad\quad}$

$1 + 0i = 1$

172

4. Existencia de elementos inversos para todos los elementos de $\mathbb{C}$:

$z \cdot \boxed{\quad} = 1$

$z \in \mathbb{C}$

$\frac{1}{z}$

$z \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$

173

5. Conmutatividad:

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

174

Además de las propiedades señaladas
para $(\mathbb{C}, +)$ y $(\mathbb{C}, X)$,
$(\mathbb{C}, + X)$ cumple con la:

6. Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma, a derecha e izquierda:

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

$z_3 (z_1 + z_2) = z_3 z_1 + z_3 z_2$

175

$(\mathbb{C},+ X)$ es un [_____]

campo

(excepción:
el elemento $0 \in \mathbb{C}$
carece de
inverso multiplicativo)

176

Así,
queda constituido
un conjunto de números
con las siguientes operaciones
definidas en él:

- suma
- resta
- multiplicación
- división
- potenciación
- radicación

1.14.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* las propiedades del campo de los números complejos, representado por $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100